

1 約数と倍数

素因数分解を使いこなす

check

整数問題に用いる考え方は、全ての数的推理の問題の基礎となるものです。この論点でキーワードとなる考え方には、以下のようなものがあります。

「約数・倍数」「最大公約数・最小公倍数」「素因数分解」

習得のためのポイント 素因数分解

素因数分解とは、ある自然数を素数の積で表すことです。

素数とは、3、5、7などの約数が1とその数字だけの自然数を指します。

問 75を素因数分解するといくつになるでしょう？

解説

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 75} \\ 5 \overline{) 25} \\ 5 \overline{) 5} \\ 1 \end{array}$$

つまり、75という数字は「3が1つと5が2つ」によって成り立っているということが言えるわけです。

これを数式で表わすと次のようになります。

$$75 = 3 \times 5^2$$

それでは、この知識を使って、典型問題ともいえる「約数の個数」にトライしてみましょう。

例題

24の約数の個数を求めよ。

check

解説

約数の個数について下記のルールがあります。

ある数を素因数分解した結果が $x^n \times y^m$ と表されるとき、約数の個数は $(n+1) \times (m+1)$ 個になります。

このとき、素因数分解の知識を活用します。24を素因数分解すると、 $24 = 2^3 \times 3^1$ となります。

素因数、この場合、2と3の指数に着目します。



学習のアドバイス

「指数」とは各数字の右上にある数字です。数的推理ではどうしても算数や数学の授業で聞いた用語が出てきます。その知識は問題を解きながら身につくものですから、現時点でさっぱり忘れていたとしても大丈夫です。

2の指数は3で、3の指数は1です。ですから24の約数の個数は、 $(3+1)(1+1) = 8$ となります。

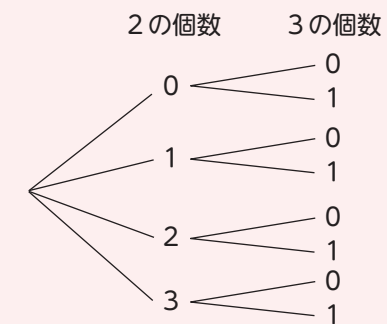
〈公式の補足〉

公式の考え方を少し補足します。素因数分解の結果からお分りの通り、「24という数字は2が3つと3が1つから成り立っている」と言えます。

さて、3を1つだけ使って2を使わない3は24の約数ですし、2を1つだけ使って3を使わない2も約数ですね。3と2を1つずつ使った6も約数です。

つまり、素因数分解の結果、24の約数になるためには3を1回まで使える、および2を3回まで使えるということが言えます。

下記のように図で表わされます。



なお、24の約数のうち、「2が0個、3が0個」の約数は「1」を表しています。

最大公約数と最小公倍数の知識が前提となる問題

check

習得のためのポイント 最大公約数・最小公倍数

問 36、60、210の最大公約数と最小公倍数は、それぞれいくつになるか。

解説

ルールを確認します。

- ① 共通する素因数で割る。
- ② 共通する素因数がなくなったら、2つ以上割れる素因数で割り、割れなかった数字はそのまま下におろす。2つ以上割れる素因数がなくなったら終了。
- ③ ①の数字をかけたものが最大公約数。左上から右下に並んでいる数字すべてをかけたものが最小公倍数。

2)	36	60	210	
×					
3)	18	30	105	
×					
2)	6	10	35	
×					
5)	3	5	35	
×	3	×	1	×	7

最大公約数から求めます。

3つの数字に共通していた素因数は、青でくくった2と3のみです。
したがって、 $2 \times 3 = 6$ で最大公約数は6となります。

最小公倍数はすべての数字をかけてしまえばよいので、
 $2 \times 3 \times 2 \times 5 \times 3 \times 1 \times 7 = 1260$ です。

例題

check

縦6cm、横8cm、高さ5cmの直方体の箱を、同じ向きに隙間なく積み上げて立方体を作るとき、必要な箱の最小数はいくつか。

解説

「立方体になる」ということは、「縦、横、高さの3辺の長さが等しくなる」ということです。

縦が6cmの直方体ですから、並べていくことで作れる数字は1個で6cm、2個で12cm、3個で18cm…、というようになっていくはずですが、つまり、縦の長さは6の倍数であると言えます。

同様の考え方で、横の長さは8cm、16cm…で8の倍数、高さは5の倍数となります。

今、「縦、横、高さの3辺の長さが等しくなる」数字は、「6の倍数と8の倍数と5の倍数が等しくなる数字」であることがわかりました。

「6の倍数と8の倍数と5の倍数が等しくなる数字」は「6と8と5の公倍数」です。さらに、聞かれているのは「必要な箱の最小数」ですから、「6と8と5の公倍数」のうち最小のもの、つまり、「6と8と5の最小公倍数」を求めればよいということになります。

2)	6	5	8	
×	3	×	5	×	4

以上から、立方体の一辺の長さは120cmとなります。これは一辺あたり、元の直方体をタテに $120 \div 6 = 20$ [個]、ヨコに $120 \div 8 = 15$ [個]、高さは $120 \div 5 = 24$ [個] 積み上げたものになりますので、答えは

$$20 \times 15 \times 24 = 7200 \text{ [個]}$$

となります。