

2 余り

「余り」に関する約数と倍数の知識が大前提

check

割り算をした結果の「余り」を使った出題パターンは複数ありますが、解答へ向けた考え方の共通点は「どんな数字なら余りが出ないか?」、言い換えれば、「どんな数字なら割り切れるのか?」です。

習得のためのポイント 割り切れる数とは?

余りに関する問題に入る前に、余りが出ない、「割り切れる」という用語の取り扱い方を習得しておきましょう。

問 7でも8でも11でも割り切れる自然数は、1~3000の間にいくつあるでしょうか?

解説

まず、具体的に7で割り切れる数を挙げていきます。

7、14、21、28…。

ご覧いただいております通り、7で割り切れる数は7の倍数を表しますので、「7でも8でも11でも割り切れる数」というのは、7の倍数でも8の倍数でも11の倍数でもある数字です。

学んだ知識を活かしてスマートに表現すれば、「7と8と11の公倍数」と言えます。

7、8、11の最小公倍数は616ですから、次は3000までの間に7、8、11の公倍数がいくつ出てくるかを考えることとなります。

3000を616で割ってみましょう。

$$3000 \div 616 = 4 \cdots 536$$

つまり、3000という数字は、7、8、11の公倍数である616が4つと、それに536をプラスしたものという見方ができます。

問われているのは「7でも8でも11でも割り切れる自然数」の個数ですから今回は「4個」です。

例題

check

7で割ると4余り、8で割ると5余り、11で割ると8余る自然数の中で、最も小さい数は何か。

解説

冒頭で確認したように、余りに関する問題では「どんな数字なら割り切れるのか?」を考えてみるのが、とても重要です。

今回問われているのは「7で割ると4余る」数字です。「7で割り切れる数字」は、パターン習得のためのポイントで学習した通り、7の倍数でした。

「7で割ると4余る」ということは7の倍数よりも4多い数字です。

$$\begin{array}{r} 3 \cdots 1 \\ 3 \overline{) 10} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \Delta \cdots 4 \\ 7 \overline{) \bigcirc} \\ \hline \end{array}$$

10という数字は3が3つと+1、つまり「3の倍数+1」と言えます。このようにして考えると、「7で割ると4余る」数字とは「7の倍数+4」を意味します。

さらにここで見方を変えます。「7の倍数+4」ということは、あとプラス3をすれば7の倍数になります。

例えば、 $7 \times 1 + 4 = 11$ ですが、プラス3をすると、 $11 + 3 = 14$ となり、7の倍数になります。言い換えれば、この数字は7の倍数に3足りない数字、「7の倍数-3」となるような数字です。

同様に、「8で割ると5余る」数字は「8の倍数+5」したがって「8の倍数-3」。

「11で割ると8余る」というのは11の倍数-3となります。

まとめると、この数字は

「 $\boxed{7 \text{の倍数}} - 3$ 」かつ「 $\boxed{8 \text{の倍数}} - 3$ 」かつ「 $\boxed{11 \text{の倍数}} - 3$ 」です。

つまり、「7の倍数でもあり、8の倍数でもあり、11の倍数でもある数字から3引いたもの」となります。もっとも小さい数字ですから「7と8と11の公倍数から3を引いたもののうち、最も小さい数字」を探せばいいわけです。

「7と8と11の公倍数のうち最も小さいもの」とは「7と8と11の最小公倍数616」ですから、それから3を引いた数字が答えになります。したがって正答は613です。